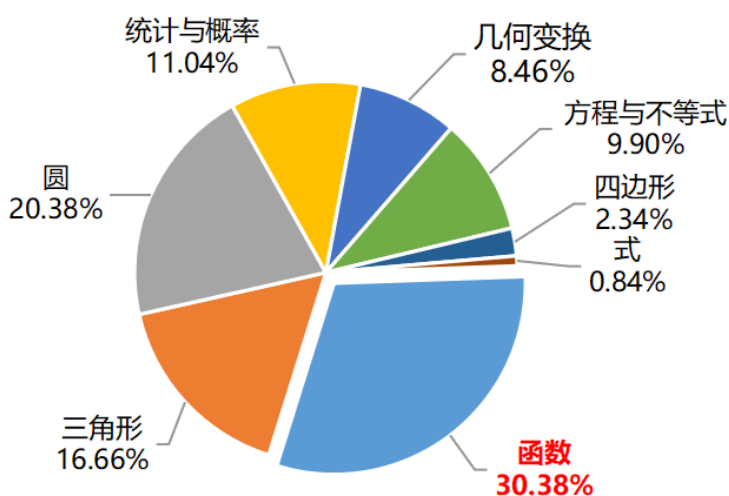


第1讲 二次函数基础

二次函数是人教版教材第二十二章的内容，在了解二次函数性质的基础上，还会与我们之前所学的代数及几何进行综合。本模块《二次函数进阶》，包括二次函数的基本概念及解析式与几何变换，重点涉及二次函数图象与系数关系，此外还会讲解二次函数的实际应用。

本模块难度部分偏难，其余中等，在对基础知识夯实的基础上，会进行性质的综合利用，本模块分为二次函数基础、二次函数图象专题（一）、二次函数图象专题（二）、二次函数实际问题4讲内容，加油站与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
二次函数的概念	★	低
二次函数的解析式	★★	高
二次函数的几何变换	★★★	中
二次函数图象与系数的关系	★★★★★	高
二次函数的实际应用	★★★	高

一、二次函数的相关概念

1. 二次函数的概念

一般地，形如_____的函数叫做二次函数．

其中，_____是自变量，_____叫做二次项，_____是一次项，_____为常数项；_____为二次项系数，_____为一次项系数．

判断函数是否为二次函数的方法：

- ①含有_____个变量，且自变量的最高次数为_____；
- ②二次项系数不等于_____；
- ③等式两边都是_____．

 举个“栗子”

 栗子1

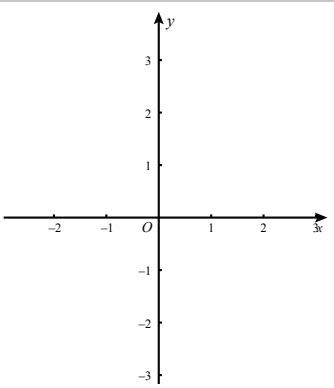
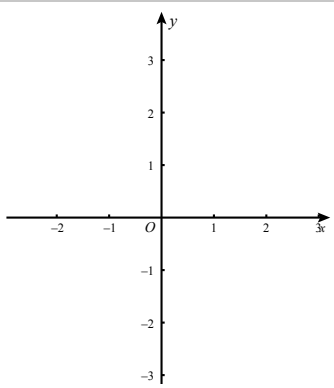
1. 若 $y = (m^2 + m)x^{m^2 - 2m - 1}$ 是二次函数，则 m 的值为_____．

 栗子2

2. 若二次函数 $y = (m - 2)x^2 + 2x + (m^2 - 4)$ 的图象经过原点，则 $m =$ _____．

2. 二次函数的基本性质

💡 二次函数一般式

a 的符号	$a > 0$	$a < 0$
函数图象		
开口方向	向__	向__
对称轴	$x = \underline{\hspace{2cm}}$	
顶点坐标		
函数最值	有最__值__	有最__值__
	当定义域为全体实数时，函数的最小值或最大值是顶点__坐标的值	
增减性	当 $x < \underline{\hspace{1cm}}$ 时， y 随 x 的增大而__	当 $x < \underline{\hspace{1cm}}$ 时， y 随 x 的增大而__
	当 $x > \underline{\hspace{1cm}}$ 时， y 随 x 的增大而__	当 $x > \underline{\hspace{1cm}}$ 时， y 随 x 的增大而__
开口大小	$ a $ 越大，开口__； $ a $ 越小，开口__。 在对称轴右侧，沿着逆时针方向， a 的值逐渐__。	

💡 二次函数顶点式

二次函数顶点式为 $y = a(x - h)^2 + k$ ，对称轴为 $x = h$ ，顶点坐标为 (h, k)

二次函数交点式

$y = \underline{\hspace{2cm}}$ 也是表示二次函数的一种解析式，叫作 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，其中 x_1, x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根，即二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象与 $\underline{\hspace{1cm}}$ 轴交点的 $\underline{\hspace{1cm}}$ 坐标；对称轴为 $\underline{\hspace{2cm}}$

栗子3

3. 对于二次函数 $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 4$ ，下列说法正确的是（ ）。
- A. 当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大 B. 当 $x = 2$ 时， y 有最大值 -3
- C. 图象的顶点坐标为 $(-2, -7)$ D. 图象与 x 轴有两个交点
4. 如果二次函数 $y = x^2 + 3kx + 2k - 4$ 图象对称轴为直线 $x = 3$ ，那么二次函数的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 对于二次函数 $y = (x - 1)^2 + 2$ 的图象，下列说法正确的是（ ）。
- A. 开口向下 B. 对称轴是直线 $x = -1$
- C. 顶点坐标是 $(1, 2)$ D. 与 x 轴有两个交点
6. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ，自变量 x 与函数值 y 的对应值如下表所示：

x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	...
y	...	4	0	-2	-2	0	4	...

下列说法中正确的是（ ）。

- A. 抛物线的开口向下 B. 当 $x > -3$ 时， y 随 x 的增大而增大
- C. 二次函数的最小值是 -2 D. 抛物线的对称轴是直线 $x = -\frac{5}{2}$

栗子4

7. 若二次函数 $y = x^2 - 6x + c$ 的图象经过 $A(-1, y_1)$ 、 $B(2, y_2)$ 、 $C(3 + \sqrt{2}, y_3)$ 三点，则关于 y_1, y_2, y_3 大小关系正确的是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
8. 已知抛物线 $y = a(x - 2)^2 + k$ ($a > 0, a, k$ 为常数)， $A(-3, y_1)$ ， $B(3, y_2)$ ， $C(4, y_3)$ 是抛物线上三点，则 y_1, y_2, y_3 由小到大依序排列为（ ）。
- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_2 < y_1 < y_3$ C. $y_2 < y_3 < y_1$ D. $y_3 < y_2 < y_1$
9. 已知两点 $M(-6, y_1)$ ， $N(2, y_2)$ 均在抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 上，点 $P(x_0, y_0)$ 是抛物线的顶点，若 $y_0 \leq y_2 < y_1$ ，则 x_0 的取值范围是（ ）。
- A. $x_0 < -2$ B. $x_0 > -2$ C. $-6 < x_0 < -2$ D. $-2 < x_0 < 2$

10. 已知二次函数 $y = x^2 + (m - 1)x + 1$ ，当 $x > 1$ 时， y 随 x 的增大而增大，而 m 的取值范围是（ ）。

- A. $m = -1$ B. $m = 3$ C. $m \leq -1$ D. $m \geq -1$

11. 若二次函数 $y = (x - k)^2$ ，当 $x \leq 2$ 时， y 随 x 的增大而减小，则 k 的取值范围为（ ）。

- A. $k > 2$ B. $k < 2$ C. $k \leq 2$ D. $k \geq 2$

二、待定系数法求二次函数解析式

一般式

已知	已知抛物线过任意三点的坐标 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) 。
求解	设二次函数解析式为_____， 分别_____三个点的坐标得三元一次方程组， 求得参数值，代入一般式中。
总结	① 任何二次函数都可以整理成一般式_____的形式。 ② 已知抛物线上任意_____坐标，一般采用一般式求解二次函数解析式。

顶点式

已知	已知抛物线的顶点坐标 (h, k) 和图象上其它任意一点。
求解	设二次函数的解析式为_____， 再代入另一个点的坐标求出_____的值， 从而求得函数解析式 $y = a(x - h)^2 + k$ 。
总结	已知抛物线_____，一般采用顶点式求解二次函数解析式

交点式

已知	已知抛物线与 x 轴的两个交点 $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ 和图象上其它任意一点.
求解	设二次函数的解析式为_____, 再代入第三个点的坐标求出____的值, 最后将交点式_____化简为_____.
总结	① 已知_____, 一般采用交点式求解二次函数解析式. ② 已知对称轴和抛物线与 x 轴的一个交点, 利用对称性先求出抛物线与 x 轴的_____, 再采用交点式求解二次函数解析式.

! 注意:

用交点式求解析式后一定要化简成_____或_____.

栗子6

12. 已知抛物线经过点 $(3, 14)$, $(1, 4)$, $(2, 7)$ 三点, 求抛物线解析式.

13. 已知二次函数的图象的顶点坐标为 $(-2, -3)$, 且图象经过点 $(-3, -1)$, 求这个二次函数的解析式.

14. 抛物线过 $(-1, 0)$, $(3, 0)$, $(1, -5)$ 三点, 求二次函数的解析式.

三、二次函数的几何变换

1. 二次函数的平移

二次函数平移口诀：_____

	$y = ax^2 + bx + c$	$y = a(x - h)^2 + k$
上下平移 n 的单位的解析式	_____	_____
左右平移 m 的单位的解析式	_____	_____

栗子7

15. 将抛物线 $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2$ 向右平移3个单位，再向下平移2个单位，得到抛物线解析式为（ ）.
- A. $y = -\frac{1}{2}(x + 4)^2 - 2$ B. $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$ C. $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 2$ D. $y = -\frac{1}{2}(x + 4)^2 + 2$
16. 抛物线 $y = x^2 + 6x + 7$ 可由抛物线 $y = x^2$ 如何平移得到的（ ）.
- A. 先向左平移3个单位，再向下平移2个单位 B. 先向左平移6个单位，再向上平移7个单位
- C. 先向上平移2个单位，再向左平移3个单位 D. 先向右平移3个单位，再向上平移2个单位

栗子8

17. 若抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 不动，将平面直角坐标系 xOy 先沿水平方向向右平移一个单位，再沿铅直方向向上平移三个单位，则原抛物线图象的解析式应变为（ ）.
- A. $y = (x - 2)^2 + 3$ B. $y = (x - 2)^2 + 5$ C. $y = x^2 - 1$ D. $y = x^2 + 4$

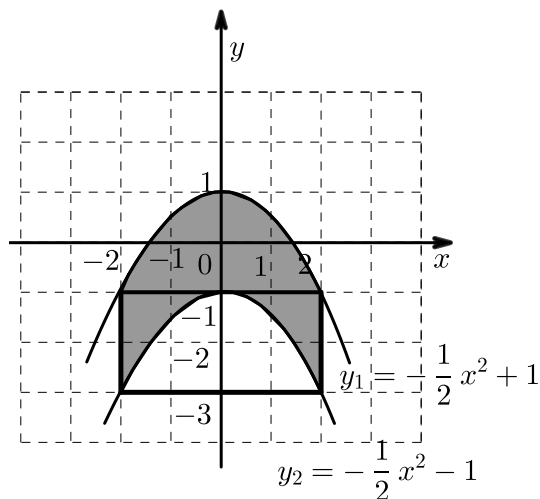
栗子9

18. 已知二次函数 $y = x^2 - 2mx + m^2 + 3$ （ m 是常数），把该函数的图象沿 y 轴平移后，得到的函数图象与 x 轴只有一个公共点，则应把该函数的图象（ ）.
- A. 向上平移3个单位 B. 向下平移3个单位 C. 向上平移1个单位 D. 向下平移1个单位

19. 已知平面直角坐标系中有两个二次函数 $y = a(x+1)(x+7)$ 及 $y = b(x+1)(x-15)$ 的图象，将二次函数 $y = b(x+1)(x-15)$ 的图象依下列哪一种平移方式后，会使得此两图象对称轴重叠（ ）。
- A. 向左平移4个单位长度
B. 向右平移4个单位长度
C. 向左平移11个单位长度
D. 向右平移11个单位长度

栗子10

20. 如图，两条抛物线 $y_1 = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ 与 $y_2 = -\frac{1}{2}x^2 - 1$ 与分别经过点 $(-2, 0)$ ， $(2, 0)$ 且平行于 y 轴的两条平行线围成的阴影部分的面积为 _____。



2. 二次函数的对称

二次函数关于坐标轴对称口诀：_____

	$y = ax^2 + bx + c$	$y = a(x-h)^2 + k$
关于 x 轴对称	_____	_____
关于 y 轴对称	_____	_____
关于原点对称	_____	_____

二次函数的特殊对称：

①关于直线 $y = m$ 对称

$y = a(x-h)^2 + k$ 关于直线 $y = m$ 对称，开口大小_____，方向_____， a 变成_____，把顶点 (h, k) 关于直线 $y = m$ 对称变成_____，所以新的解析式为_____。

②关于直线 $x = n$ 对称

$y = a(x-h)^2 + k$ 关于直线 $x = n$ 对称，开口大小_____，方向_____， a 变成_____，把顶点 (h, k) 关于直线 $x = n$ 对称变成_____，所以新的解析式为_____。

栗子11

21. 在平面直角坐标系中，先将抛物线 $y = x^2 + x - 2$ 关于 x 轴作轴对称变换，再将所得的抛物线关于 y 轴作轴对称变换，那么经两次变换后所得的新抛物线的解析式为（ ）。

- A. $y = -x^2 - x + 2$ B. $y = -x^2 + x - 2$ C. $y = -x^2 + x + 2$ D. $y = x^2 + x + 2$

栗子12

22. 将抛物线 $C: y = x^2 + 3x - 10$ ，将抛物线 C 平移到抛物线 C' 。若两条抛物线 C ，抛物线 C' 关于直线 $x = 1$ 对称，则下列平移方法中正确的是（ ）。

- A. 将抛物线 C 向右平移 $\frac{5}{2}$ 个单位 B. 将抛物线 C 向右平移3个单位
C. 将抛物线 C 向右平移5个单位 D. 将抛物线 C 向右平移6个单位

3. 二次函数的旋转

①绕顶点旋转 180°

$y = a(x - h)^2 + k$ 绕顶点旋转 180° ，开口大小_____，方向_____， a 变成____，顶点 (h, k) _____，所以新的解析式为_____。

②绕某点 (m, n) 旋转 180°

$y = a(x - h)^2 + k$ 绕点 (m, n) 旋转 180° ，开口大小_____，方向_____， a 变成____，把顶点 (h, k) 先关于 (m, n) 变成_____，所以新的解析式为_____。

栗子13

23. 将抛物线 $y = 2x^2 - 12x + 16$ 绕它的顶点旋转 180° ，所得抛物线的解析式是（ ）。

- A. $y = -2x^2 - 12x + 16$ B. $y = -2x^2 + 12x - 16$
C. $y = -2x^2 + 12x - 20$ D. $y = -2x^2 + 12x - 19$

栗子14

24. 已知抛物线 $y = x^2 - 5x + 2$ 与 $y = ax^2 + bx + c$ 关于点 $(3, 2)$ 对称，则 $3a + 3c + b =$ _____。